GETARAN BEBAS PADA BALOK KANTILEVER

Kusdiman Joko Priyanto

Abstrak

Pada dasarnya sistem pegas massa dengan satu derajat kebebasan (single degree of freedom) merupakan sebuah konsep dasar yang diperlukan dalam menganalisa dinamika struktur, dimana matrik massa terpusat dan matrik massa konsisten yang diperlukan untuk menganalisa sebuah batang dan balok dapat diturunkan secara detail. Besarnya waktu getar alami sebuah batang kantilever dan balok yang terjepit pada ujungnya dihitung dengan menggunakan matrik massa terpusat dan matrik massa konsisten.

Kata kunci : *derajad kebebasan, matrik massa, waktu getar alamai*

1. PENDAHULUAN.

Pada dasarnya sistem pegas massa dengan satu derajat kebebasan merupakan sebuah sistem dasar yang digunakan dalam mempelajari sebuah sistem kontinu seperti sebuah batang balok dan rangka batang. Untuk sebuah sistem pegas massa pada persamaan (1) berlaku hubungan sebagai berikut :

$$\mathbf{mx + kx = F(t)} \qquad (1)$$

Massa dinyatakan dengan m, k adalah kekakuan pegas dan F(t) adalah fungsi beban yang tergantung pada waktu. Persamaan-1 diatas dapat secara mudah diturunkan dengan menggunakan hukum Newton II. Persamaan (1) diatas juga merupakan persamaan diferensial tingkat dua yang solusinya terdiri dari solusi homogen dan solusi non homogen.

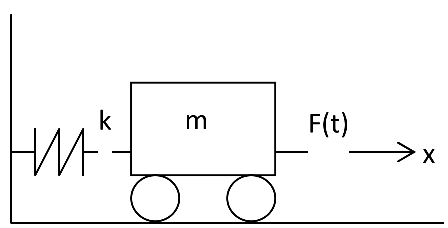
Solusi analitis dari persamaan (1) diselesaikan dengan cara numerik, bila sisi sebelah kanan dari persamaan (1) sama dengan nol, maka akan didapat persamaan homogen sebagai berikut :

$$\mathbf{x + \omega^2 x = 0} \qquad (2)$$

$\omega = (k/m)^{1/2}$ adalah waktu getar alami sistem. Dengan memperhatikan persamaan (2) besarnya waktu getar alami tergantung pada kekauan (k) dan massa (m). Gerak yang dinyatakan dengan persamaan (2) diatas dinamakan persamaan gerak harmonik sederhana.

Bila fungsi perpindahan sepanjang sumbu x elemen batang tersebut bersifat linier, maka fungsi perpindahan tersebut dapat dinyatakan dengan hubungan berikut :

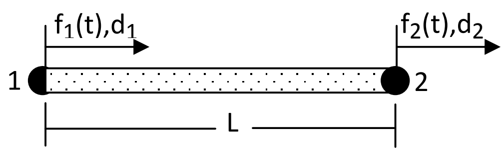
$$\mathbf{\hat{u} = a_1 + a_2\, x} \qquad (3)$$



Gambar 1 : sisitem pegas massa

2. PERSAMAAN ELEMEN HINGGA

Persamaan elemen hingga untuk sebuah batang dapat diturunkan dengan menggunakan sebuah diagram batang bebas (*free body)* berikut :



Gambar 2 : elemen batang dengan beban $f_1(t)$ dan $f_2(t)$.

Persamaan (3) diatas dapat dinyatakan dengan bentuk fungsi sebagai berikut :

$$\hat{u} = N_1 d_1 + N2\, d_2 \qquad (4)$$

$$N1 = 1 - \frac{x}{L} \qquad (5.a)$$

$$N2 = \frac{x}{L}$$

(5.b)

Bila hubungan antara regangan dan perpindahan dapat dinyatakan sebagi berikut :

$$\{\varepsilon_x\} = \frac{du}{dx} = [B].\{d\} \qquad (6)$$

dimana :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad (7.a)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d1 \\ d2 \end{Bmatrix}$$

(7.b)

Maka hubungan antara tegangan dan regangan dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\{\sigma x\} = [D].\{\varepsilon x\} = [D].[B].\{d\} \qquad (8)$$

$[D]$ = adalah matriks elastisitas

3. MATRIKS MASSA

3.1. Matriks massa terpusat

Pada umumnya sebuah system tidak berada dalam kondisi seimbang akibat beban yang tergantung pada waktu sehingga besarnya $f_1(t)$ tidak sama dengan $t_2(t)$. Dengan menggunakan hukum Newton II yaitu f = m . a untuk setiap nodal sesuai dengan gambar (2) maka didapat hubungan berikut :

$$f^{\,e} = f_1(t) + m_1 \frac{\partial^2 d_1}{\partial t^2}$$

$$f^{\,e} = f_2(t) + m_2 \frac{\partial^2 d_2}{\partial t^2} \qquad (9)$$

dimana : f_1 dan f_2 adalah gaya luar

Matriks massa m_1 dan m_2 dapat dihitung dengan menggunakan metode massa terpusat yang bekerja pada nodal 1 dan nodal 2.

Besarnya massa terpusat tersebut pada masing-masing nodal adalah :

$$m_1 = \frac{1}{2}.\rho.A.L \qquad (10.a)$$

$$m_1 = \frac{1}{2}.\rho.A.L \qquad (10.b)$$

dimana ρ adalah massa jenis, L adalah panjang elemen batang dan A adalah luas penampang batang. Bila persamaan (9) ditulis dalam bentuk matriks, maka akan didapat :

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2.d_d}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 d_2}{\partial t^2} \end{Bmatrix} \qquad (11)$$

Bila {f} adalah persamaan (11) dinyatakan sebagai perkalian antara matriks kekakuan $[k]$ dan matriks perpindahan nodal {d} maka akan didapatkan hubungan sebagai berikut :

$$\{f^e\} = [k].\{d\} + [m]\{d\} \qquad (12)$$

dimana :

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2.d_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2.d_2}{\partial t^2} \end{Bmatrix} \qquad (14)$$

$$[m] = \frac{\rho.A.L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Matriks $[k]$ diatas adalah matriks kekakuan elemen batang yang secara mudah dapat diturunkan, sdangkan matriks $[m]$ merupakan matriks massa terpusat. Matriks massa terpusat sesuai dengan persamaan (15) merupakan matriks diagonal.

Sifat matriks diagonal akan mempermudah dalam pemecahan persamaan secara global. Akan tetapi keakuratan solusi yang didapat tidak sebaik bila digunakan matriks massa konsisten.

3.2. Matriks massa konsisten

Banyak metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan matriks massa konsisten. Metode yang biasa digunakan adalah metode kerja virtual yang merupakan dasar dari berbagai macam prinsip energi. Dengan menggunakan prinsip energi tersebut, maka matriks massa konsisten dapat dinyatakan sebagi berikut :

$$[m] = \iiint_V \rho \{N\}^T \{N\} dv \qquad (16)$$

dimana (n) adalah fungsi bentuk dan V adalah volume / isi.

Matriks $[m]$ini dinamakan matriks massa konsisten yang didapat dengan menggunakan fugsi bentuk {N} yang digunakan untuk mendapatkan matriks kekauan.

Secara umum matriks $[m]$ini merupakan matriks penuh yang bersifat simetris dan untuk sebuah elemen batang adalah

$$[m] = \iiint_V \rho \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} . \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} . dV \qquad (17)$$

Bila persamaan 17 disederhanakan maka didapatkan hubungan sebagai berikut :

$$[m] = \rho . A \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} . \left\{ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} . dx \qquad (18)$$

Dengan melakukan integrasi sepanjang batang maka matriks massa konsisten adalah :

$$[m] = \frac{1}{6} . \rho . A . L \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

4. WAKTU GETAR ALAMI

Waktu getar alami sebuah batnag dapat dipecah melalui persamaan sebagai berikut :

$$[M] . \{d\} + [K] . \{d\} = 0 \qquad (20)$$

dimana: $[M]$adalah matriks kekauan total

$[K]$ adalah matriks kekauan batang.

Solusi homogen persamaan (20) adalah sebuah persamaan harmonic yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\{d(t)\} = \{d^1\} . e^{1.\omega.t} \qquad (21)$$

dimana: (d) adalah mode alami yang diasumsikan tidak bergantung waktu.

ω adalah waktu getar alami sIstem.

Bila persamaan (21) dideferensiasikan dua kali terhadap waktu maka didapat :

$$\{d(t)\} = \{d^{'}\} (-\omega^2) . e^{1.\omega.t} \qquad (22)$$

Dengan memasukkan hubungan antara persamaan (21) dan (22) kedalam persamaan (20) maka didapatkan :

$$-\omega 2 \; [M] . \{d^{'}\} . e^{i\omega t} + [K] . \{d'\} . e^{i\omega t} = 0 \qquad (23)$$

atau :

$$e^{\,i\omega t} \; (. [K] - \omega^2 [M]) . \{d'\} = 0 \qquad (24)$$

Karena ($e^{i\omega t}$) tidak sama dengan nol, maka bila persamaan 24 dibagi dengan ($e^{i\omega t}$) akan didapatkan hubungan sebagi berikut :

$$\left([K]-\omega^2[M]\right).\{d'\}=0 \tag{25}$$

Pada persamaan (25) merupakan sistem persamaan homogen linier dalam (d'). Persamaan tersebut mempunyai solusi yang bersifat non trivial bila determinan matriks koefisien (d') sama dengan nol, atau :

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)=0 \tag{26}$$

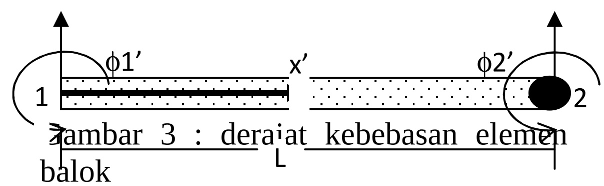
Pada persamaan (26) diatas merupakan persamaan aljabar derajat (n) dimana (n) merupakan jumlah derajat kebebasan sesuai dengan masalah yang ditinjau. Untuk mendapatkan besarnya waktu getar alami sistem di bawah ini akan ditunjukkan hasil perhitungan waktu getar alami sebuah batang.

Untuk menganalisa getaran bebas sebuah balok diperlukan matriks massa konsisten atau matriks massa terpusat. Persamaan yang digunakan dalam analisis getaran bebas sebuah balok hamper sama dengan persamaan yang digunakan untuk menganalisis sebuah batang. Matriks massa terpusat untuk sebuah elemen balok dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$[m']=\frac{\rho.A.L}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\begin{matrix}d'.y_1\\\phi_1'\\d'.y_2\\\phi_2'\end{matrix} \tag{27}$$

ρ adalah massa jenis, A adalah luas penampang balok, L adalah panjang balok. Derajat kebebasan yang berhubungan dengan elemen balok tersebut adalah perpindahan vertiKal dan putaran sudut dinodal 1 dan dinodal 2.

Berdasarkan persamaan (27) massa balok keseluruhan terbagi menjadi dua buah massa terpusat dinodal 1 dan nodal 2.



Gambar 3 : derajat kebebasan elemen balok

Seperti halnya pada sebuah batang, maka untuk sebuah balok matriks massa konsistennya dapat diturunkan berdasarkan fungsi bentuk. Fungsi bentuk untuk sebuah balok adalah :

$$N1=\frac{1}{L^3}\left\{2X^3-3X^2.L+L^3\right\}$$

$$N2=\frac{1}{L^3}\left\{X^3L-2X^2.L^2+XL^3\right\}$$

$$N3=\frac{1}{L^3}\left\{-2X^3+3X^2.L\right\}$$

$$N4=\frac{1}{L^3}\left\{X^3L-2X^2.L^2\right\} \tag{28}$$

Dengan menggunakan fungsi bentuk sesuai dengan persamaan (28) diatas maka matriks massa konsisten sebuah balok adalah :

$$[m']=\iiint_V \rho.[N]^T[N].dV$$

=

$$\int_0^L \iint_A \rho \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\}.dA.dx'$$

persm. (29)

Dengan menyelesaikan persamaan (29), maka matriks massa konsisten sebuah elemen balok adalah :

$$[m'] = \frac{\rho.A.L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

persm. (30)

Untuk menganalisa getaran bebas sebuah balok diperlukan matriks kekakuan elemen balok. Matriks kekauan elemen balok tersebut dapat diturunkan berdasarkan fungsi bentuk sesuai dengan persamaan (28), yaitu :

$$[k'] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

(31)

dimana:

E : modulud elastisitas

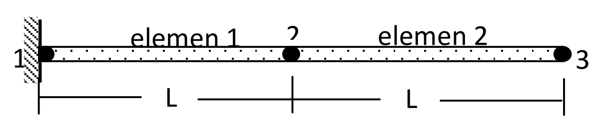
I : momen inersia penampang

L : panjang elemen

Bila matriks massa terpusat atau matriks matriks massa konsisten dan matrik kekakuan elemen balok sesuai dengan persamaan (31) dimasukkan kedalam persamaan (26) maka didapatkan waktu getar alami sebuah elemen balok.

5. PERHITUNGAN NUMERIK.

Getaran bebas sebuah batang, seperti pada gambar 4 sebuah batang sepanjang 2L mempunyai moduldus elastisitas E, luas penampang A dan massa jenis ρ terjepit pada posisi x = 0 dan bebas pada posisi x = 2L. Untuk mendapatkan harga waktu getar alami batang, pertama batang tersebut dibagi menjadi 2 buah elemen dengan panjang masing-masing elemen sama dengan L



Gambar 4 : batang dianalisa sepanjang L

Bila batang tersebut dianalisa sebagi batang 3 nodal yang terdiri dari 2 buah elemen dengan panjang masing-masing elemen L, maka matriks kekauan elemen untuk masing-masing elemen adalah :

$$[K_1] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

$$[K_2] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

Dengan merakit matriks kekakuan elemen sesuai dengan persamaan (32) dan (33) akan didapat matriks kekakuan total $[K]$ untuk batang tersebut adalah :

$$[K] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Selanjutnya dihitung besarnya matriks massa terpusat $[m]$ untuk masing-masing elemen. Besarnya matriks massa terpusat untuk elemen 1 dan elemen 2 adalah :

$$[m_1] = \frac{\rho.AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

$$[m_2] = \frac{\rho.AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

Matriks masa terpusat total didapat dengan merakit matriks massa trpusat elemen 1 dan elemen 2 sesuai persamaan (35) dan (36) yaitu :

$$[M] = \frac{\rho.A.L}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

Dengan memasukkan matriks kekauan total $[K]$ sesuai dengan persamaan (34) dan matriks massa terpusat total $[M]$ sesuai dengan persamaan (37) kedalam persamaan (26) serat digunakan syarat batas $d_1 = 0$ maka didapat persamaan berikut :

$$\begin{vmatrix} .(2\frac{E}{\rho L^2} - \omega^2) & -\frac{E}{\rho L^2} \\ -\frac{E}{\rho L^2} & (\frac{E}{\rho L^2} - \frac{\omega^2}{2}). \end{vmatrix} = 0 \qquad (38)$$

Bila diterminan dalam persamaan (38) dievaluasi maka didapat besarnya waktu getar alami system sebagai berikut :

$$\omega 1 = 0.7654 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

$$\omega 2 = 1.8478 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Bila matriks massa konsisten digunakan dalam analisis tersebut maka matriks massa konsisten total merupakan sebuah matriks penuh yang bersifat simetris sebagi berikut :

$$[M] = \frac{\rho.A.L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (39)$$

Dengan memasukkan matriks massa konsisten total sesuai dengan persamaan (39) dan matriks kekakuan total sesuai dengan persamaan (34) dengan syarat batas d1 = 0 kedalam persamaan (26) maka didapat persamaan berikut :

$$\left| \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 . \frac{\rho . AL}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0 \qquad (40)$$

Dengan mengevaluasi bentuk persamaan (40) diatas maka besarnya waktu getar alami sistem adalah :

Tabel 1 : Hasil perhitungan waktu getar alami massa terpusat batang kantilever.

Jml. elm. (n)	ω_1 μ	ω_2 μ	ω_3 μ	ω_4 μ	ω_5 μ	ω_6 μ	ω_7 μ	ω_8 μ	ω_9 μ	ω_{10} μ
2	0.7654	1.8478								
3	0.7764	2.1213	2.8978							
4	0.7804	2.2223	3.3259	3.9231						
5	0.7822	2.2700	3.5355	4.4550	4.9384					
6	0.7832	2.2961	3.6526	4.7601	5.5433	5.9487				

Keterangan : $\mu = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$

Tabel 2 : Hasil perhitungan waktu getar alami massa konsisten batang kantilever.

Jml. elm. (n)	ω_1 μ	ω_2 μ	ω_3 μ	ω_4 μ	ω_5 μ	ω_6 μ	ω_7 μ	ω_8 μ	ω_9 μ	ω_{10} μ
2	0.8057	2.8147								
3	0.7944	2.5981	4.7133							
4	0.7904	2.4946	4.5297	6.5503						
5	0.7886	2.4441	4.3301	6.4932	8.3517					
6	0.7876	2.4171	4.2094	6.2482	8.4440	10.132				

Keterangan : $\mu = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$

6. KESIMPULAN.

Dari hasil uraian di atas dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Pendekatan dengan massa terpusat menghasilkan matriks massa total yang bersifat simetris, sehingga mempermudah perhitungan.

$$\omega 1 = 0.8057 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

$$\omega 2 = 2.8147 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Sebagai pembanding waktu getar alami system dasar yang dihitung secara eksak adalah :

$$\omega 1 = 0.7848 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

2. Analisa dengan menggunakan massa terpusat memberikan hasil yang baik dari pada massa dibanding dengan massa konsisten.
3. Metode massa konsisten merupakan metode yang konvergen, dengan jumlah elemen yang tidak terlalu banyak, waktu getar alami dasar yang didapat mendekati harga sebesanrnya.

7. DAFTAR PUSTAKA.

Reddy, J.N. (1993), ***An Introduction to the Finite Element Method***, Mc. Graw Hill.

Weaver, William Jr., Paul R. Johnston (1984), ***Finite Elements For Structural Analysis***, Prentice Hall, New Jersey.

Sofia W. Alisjahbana (1998), ***Prinsip Dasar Metode Elemen Hingg***a, Universitas Tarumanegara Jakarta.

Katili, I. (1999), ***Aplikasi Metode Elemen Hingga Pada Rangka***, Universitas Indonesia Jakarta.

Katili, I, (2008), ***Metode Elemen Hingga Untuk Skeletal***, Raja Grafindo Persada Jakarta

Biodata Penulis :

Kusdiman Joko Priyanto. S1- Struktur FTSP UTP Surakarta (1996). S2- Struktur MTS UNDIP Semarang (2009).